ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: «ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ»

Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

1) Λάθος
2) Λάθος
3) Σωστό
4) Σωστό
5) Σωστό
6) Λάθος
7) Λάθος
8) Σωστό
9) Σωστό
10) Σωστό
11) Σωστό
12) Σωστό
13) Λάθος
14) Σωστό
15) Λάθος

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

   i. $x^4 + 125x = 0$ **ii.** $x^7 - 64x = 0$ **iii.** $x^3 + x = 0$

   Λύση

   i) $x^4 + 125x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 125) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -5$

   ii) $x^7 - 64x = 0 \Leftrightarrow x(x^6 - 64) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pm 2$

   iii) $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 + 1 = 0$ αδύνατη

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

   i. $x^2 - (\sqrt{5} + 2)x + 2\sqrt{5} = 0$ **ii.** $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ **iii.** $x(x + 1) = -1$

   Λύση

   i) $\Delta = (\sqrt{5} - 2)^2 > 0$ και οι λύσεις είναι $x_1 = 2$ και $x_2 = \sqrt{5}$

   ii) $\Delta = 0$, η διπλή ρίζα είναι $x = \frac{1}{2}$

   iii) $x^2 + x + 1 = 0$ με $\Delta < 0$, άρα αδύνατη

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

   i. $x^2-2x+4|x-1|-4=0$ ii. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0=0$

   Λύση

   i) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα
   $(x-1)^2+4|x-1|-5=0 \Leftrightarrow |x-1|^2+4|x-1|-5=0$
   και θέτουμε $y=|x-1|\geq 0$.
   Η τελευταία γράφεται ισοδύναμα $y^2+4y-5=0$
   άρα $y=1$ ή $y=-5$ απορρίπτεται.
   Οπότε $|x-1|=1 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=0$

   ii) θέτουμε $y=x+\frac{1}{x}, x\neq 0$ και έχουμε $y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow y=2$ ή $y=3$
   Για $y=2$ είναι $x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$
   Για $y=3$ είναι $x+\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

4. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt[3]{x^2-1}+|x^2-3x+2|=0$

   Λύση

   Πρέπει $x^2-1\geq 0$.
   Άρα $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
   Εφόσον $\sqrt[3]{x^2-1}\geq 0$ και $|x^2-3x+2|\geq 0$ για να είναι
   $\sqrt[3]{x^2-1}+|x^2-3x+2|=0$ πρέπει $x^2-1=0$ και $x^2-3x+2=0$, των οποίων η κοινή λύση είναι η $x=1$.

5. Να λυθεί η εξίσωση $\beta^2x^2-2\alpha\beta^2x+\alpha^2\beta^2-1=0$ με $\beta\neq 0$

   Λύση

   $\Delta=4\beta^2>0$ άρα έχουμε δυο ρίζες άνισες τις: $x=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$ ή $x=\frac{\alpha\beta-1}{\beta}$

6. Να βρείτε τις τιμές του y, ώστε η εξίσωση $x^2-2x+3=y$ με άγνωστο το x να έχει λύση.

   Λύση

   Πρέπει $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 4-4(3-y)\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 2$

7. Να λυθούν οι ανισώσεις:

   α) $x^2-5|x|+6>0$ β) $-x^2+|x|-3<0$ γ) $(2x-1)^2-3|2x-1|+2<0$

   Λύση

   α) $x^2-5|x|+6>0 \Leftrightarrow |x|^2-5|x|+6>0 \Leftrightarrow |x|>3 \Leftrightarrow x>3$ ή $x<-3$ και

   $|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$

   Άρα $x\in(-\infty,-3)\cup(-2,2)\cup(3,+\infty)$

   β) $-x^2+|x|-3<0 \Leftrightarrow -|x|^2+|x|-3<0 \rightarrow x\in\mathbb{R}$

γ) $(2x-1)^2-3|2x-1|+2<0 \Leftrightarrow |2x-1|^2-3|2x-1|+2<0 \Leftrightarrow 1<|2x-1|<2$

$\Leftrightarrow 1<|2x-1| \Leftrightarrow$ και $|2x-1|<2$

$2x-1>1 \Leftrightarrow$ | $2x-1<-1$

$x>1$ | $\boxed{x<0}$

$-2<2x-1<2 \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

$|x|>1 \Leftrightarrow 1<x$ ή $x<-1$

Τελικά $x \in \left(-\frac{1}{2},0\right) \cup \left(1,\frac{3}{2}\right)$

8. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $x^2-50x<0$ β) $2x-x^2 \geq 0$ γ) $x^2+4x \leq 5$

δ) $x^2+5x+7 \leq 0$ ε) $x^2+64 \leq -16x$ στ) $(1+x)6 \geq (2x+2)^2$

ζ) $-3x^2+10x-3 \leq 0$

Λύση

α) x^2-50x<0 $\Leftrightarrow x(x-50)<0 \Leftrightarrow 0<x<50$

β) $2x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

γ) $x^2+4x \leq 5 \Leftrightarrow x^2+4x-5 \leq 0 \Leftrightarrow -5<x<1$

δ) $x^2+5x+7 \leq 0$ → ΑΔΥΝΑΤΗ

ε) $x^2+64 \leq -16x \Leftrightarrow x^2+16x+64 \leq 0 \Leftrightarrow x=-8$

στ) $(1+x)6 \geq (2x+2)^2 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow 2(x+1)(2x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

ζ) $-3x^2+10x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$ ή $x \geq 3$.

9. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν ρίζες πραγματικές και άνισες.

α) $x^2-(2\lambda-1)x-2\lambda+1=0$ β) $(\lambda+1)x^2-2\lambda x=\lambda+1,\ \lambda \neq -1$

Λύση

α) $x^2-(2\lambda-1)x-2\lambda+1=0$.

Πρέπει Δ>0 $\Leftrightarrow \lambda<-\frac{3}{2}$ ή $\lambda>\frac{1}{2}$.

β) $(\lambda+1)x^2-2\lambda x=\lambda+1 \Leftrightarrow (\lambda+1)x^2-2\lambda x-(\lambda+1)=0$

Πρέπει Δ>0 $\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}-\{-1\}$.

10. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $x^2+15x\geq 0$ **β)** $x^2-4x<0$ **γ)** $-3x^2+5x-2\geq 0$

δ) $2x^2-4x+5>0$ **ε)** $x^2+49>14x$ **στ)** $(2x-1)^2\leq 5(1-2x)$

ζ) $42x^2-71x+30\leq 0$

Λύση

α) $x^2+15x\geq 0 \Leftrightarrow x(x+15)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -15$ ή $x\geq 0$.

β) $x^2-4x<0 \Leftrightarrow x(x-4)<0 \Leftrightarrow 0<x<4$.

γ) $-3x^2+5x-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\leq x\leq 1$.

δ) $2x^2-4x+5>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

ε) $x^2+49>14x \Leftrightarrow x^2-14x+49>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{7\}$.

στ) $(2x-1)^2\leq 5(1-2x) \Leftrightarrow (2x-1)(2x-6)\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-2,\frac{1}{2}\right]$.

ζ) $42x^2-71x+30\leq 0 \Leftrightarrow x<\frac{72}{84}$ και $x>\frac{70}{84}$.

11. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του λ. **α)** $x^2-(\lambda+1)x+\lambda^2-1=0$, **β)** $(\lambda-1)x^2-(\lambda-1)x+\lambda=0$, $\lambda\neq 1$

Λύση

α) $x^2-(\lambda+1)x+\lambda^2-1=0$

Δύο άνισες αν $-1<\lambda<\frac{3}{5}$, μία αν $\lambda=\frac{3}{5}, \lambda=-1$ καμία αν $-1>\lambda, \lambda>\frac{3}{5}$

β) $(\lambda-1)x^2-(\lambda-1)x+\lambda=0$, $\lambda\neq 1$

Δύο άνισες αν $-\frac{1}{3}<\lambda<1$, μία αν $\lambda=-\frac{1}{3}, \lambda=1$ καμία αν $-\frac{1}{3}>\lambda$ ή $\lambda>1$

12. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:
$f(x)=\sqrt{x^2-x+4}$ και $g(x)=\sqrt[3]{-x^2+3x+10}$.

Λύση

$A_f=\Re$, $A_g=[-2,5]$

13. Να λυθεί η ανίσωση $\left|x^2-3x+3\right|<1$.

Λύση

$\left|x^2-3x+3\right|<1 \Leftrightarrow -1<x^3-3x+3<1$

$x^2-3x+3>-1 \Leftrightarrow x^2-3x+4>0$

$\Delta=9-16=-7<0$ άρα $x^2-3x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$x^2-3x+3<1 \Leftrightarrow x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow x\in(1,2)$

Τελικά $x\in(1,2)$

14. Αν $-x^2+5x-6>0$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{|x-2|+|x-3|}{|x-1|+|x-5|}$$

Λύση

Το πρόσημο του τριωνύμου είναι: $-x^2+5x-6$.

$-\infty$	2	3	$+\infty$
-	+	-	

Οπότε $A=\dfrac{x-2+3-x}{x-1+5-x}=\dfrac{1}{4}$

15. Δείξτε ότι $2x(x-y)\geq 2x-\left(y^2+1\right)$.

Λύση

$2x(x-y)\geq 2x-\left(y^2+1\right) \Leftrightarrow 2x^2-2xy\geq 2x-y^2-1$

$2x^2-2xy-2x+y^2+1\geq 0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1\geq 0$

$(x-y)^2+(x-1)^2\geq 0 \ \rightarrow$ που ισχύει

16. Να δείξετε ότι $x^2+xy+x^2\geq 0$

Λύση

$$x^2+xy+x^2=\frac{1}{2}\left(2x^2+2xy+2y^2\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+2x+y^2+x^2+y^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2+x^2+y^2\right]\geq 0$$

17. Αν ισχύει $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$ και $x^2+y^2+z^2=48$ να βρείτε τους αριθμούς x, y, z

Λύση

Θέτουμε $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}=\lambda$ και προκύπτει ότι $\lambda=1$. Τελικά $x=y=z=4$

18. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε οι τιμές του τριωνύμου $(2\lambda-1)x^2-2\lambda x+2\lambda-1,\ \lambda\neq\frac{1}{2}$ να είναι θετικές, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

$(2\lambda-1)x^2-2\lambda x+2\lambda-1$, πρέπει $2\lambda-1>0$ και $\Delta<0$, τότε $\lambda>1$.

19. **α)** Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}^*$ το τριώνυμο $3\alpha x^2-2\alpha x+2(\alpha-3)$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο για όλα τα $x\in\mathbb{R}$.
β) Βρείτε τα $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η ανίσωση $3\alpha x^2-2\alpha x+2(\alpha-3)<0$ να αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) $3ax^2-2ax+2(a-3)$, πρέπει $\Delta<0$, τότε $\alpha<0$ και $\alpha>\frac{18}{5}$.

β) $3ax^2-2ax+2(a-3)<0$, πρέπει $\alpha<0$ και $\Delta<0$, τότε $\alpha<0$.

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(2\alpha-1)x+1-2\alpha=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
α) Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης και να μελετηθεί το πρόσημό της.
β) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση:
i) έχει δυο άνισες ρίζες **ii)** έχει διπλή ρίζα **iii)** είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Λύση

$x^2-(2a-1)x+1-2a=0$,

α) $\Delta=(2a-1)(2a+3)$

β) **i)** έχει δυο άνισες ρίζες $-\frac{3}{2}>\alpha$ ή $\alpha>\frac{1}{2}$,

ii) έχει διπλή ρίζα $-\frac{3}{2}=a$ ή $a=\frac{1}{2}$,

iii) είναι αδύνατη στο $-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$.

21. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \kappa x + \lambda = 0 \ (1)$ $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η (1) έχει ρίζα το 1, να δείξετε ότι $\kappa - \lambda = 1$ και να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

β) Αν η (1) έχει δύο άνισες ρίζες το x_1, x_2 να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$, $x_1^2 + x_2^2$, $|x_1 - x_2|$.

γ) Αν $|x_1 - x_2| = 1$ και $x_1^2 + x_2^2 = 13$ να υπολογίσετε τα κ, λ.

Λύση

α) Η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 1 οπότε $1 - \kappa + \lambda = 0 \Leftrightarrow \kappa - \lambda = 1$

Αν $\kappa - \lambda = 1 \Leftrightarrow \kappa = \lambda + 1$

$$x^2 - \kappa x + \lambda = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\lambda+1)x + \lambda = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\lambda+1)x + \lambda \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \lambda \ \text{ή} \ x = 1 \rightarrow \text{άρα ισχύει}$$

β)

- $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \kappa$
- $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \lambda$
- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \kappa^2 - 2\lambda$
- $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} = \sqrt{\kappa^2 - 2\lambda - 2\lambda} = \sqrt{\kappa^2 - 4\lambda}$

γ)

$$\left.\begin{matrix}\sqrt{\kappa^2 - 4\lambda} = 1 \\ \kappa^2 - 2\lambda = 13\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\kappa^2 - 4\lambda = 1 \\ \kappa^2 - 2\lambda = 13\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\kappa^2 = 4\lambda + 1 \\ \kappa^2 - 2\lambda = 13\end{matrix}\right\}$$

$$4\lambda + 1 = 2\lambda + 13 \Leftrightarrow 2\lambda = 12 \Leftrightarrow \lambda = 6$$

$$\kappa^2 = 25 \Leftrightarrow \kappa = \pm 5$$

22. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει: $(1+\lambda)x^2 + 2(2\lambda+1)x + 1 + 5\lambda \le 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

$(1+\lambda)x^2 + 2(2\lambda+1)x + 1 + 5\lambda \le 0$ $\lambda < -1$ και $\Delta = -4(\lambda^2 + 2\lambda)$.

Πρέπει $\Delta \le 0$ και $a < 0$ άρα $\lambda \le -2$.

23. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $x^2 - 2x - \lambda + 1 > 0$

β) $(\lambda - 1)x^2 - 2x - 1 < 0$

Λύση

α) $x^2 - 2x - \lambda + 1 > 0$, Δ=4λ

- Αν $\lambda < 0$ τότε ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Αν $\lambda = 0$ τότε ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$
- Αν $\lambda > 0$ τότε ισχύει για κάθε $x \in \left(-\infty, 1 - \sqrt{\lambda}\right) \cup \left(1 + \sqrt{\lambda}, +\infty\right)$

β) $(\lambda - 1)x^2 - 2x - 1 < 0$

Αν λ=1, τότε $-2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$.

Αν $\lambda \neq 1$,

- Αν $\lambda < 0$ τότε ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Αν $\lambda = 0$ τότε ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$
- Αν $\lambda \in (0,1)$ τότε $\Delta > 0$ και $a < 0$ άρα $x \in (-\infty, \rho_1) \cup (\rho_2, +\infty)$, όπου

  $\rho_1 = \dfrac{1 + \sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$ και $\rho_2 = \dfrac{1 - \sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$.
- Αν $\lambda > 1$ τότε $\Delta > 0$ και $\alpha > 0$, άρα $x \in (\rho_2, \rho_1)$

24. Δίνεται η εξίσωση $-x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ (1). Να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει πραγματικές και άνισες ρίζες. Στη συνέχεια να βρεθούν τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + 3x_1x_2 \geq 0$ όπου x_1, x_2 οι λύσεις της (1).

Λύση

$-x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Δ = $(8\lambda^2 + 5) > 0$.

Άρα ρίζες πραγματικές και άνισες.

$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + 3x_1x_2 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 - \lambda^2 - \lambda - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 0$ ή $\lambda \geq \dfrac{5}{3}$

25. Δίνονται οι εξισώσεις $x^2+\lambda x-5=0\ (1)$ και $2x^2-4x-2\lambda+2=0\ (2)$.

α) Να δείξετε ότι η (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
β) Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (2) να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
γ) Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε μία ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι αντίθετη μίας ρίζας της εξίσωσης (2**).**

Λύση

α) $\Delta=\lambda^2+20>0$ άρα η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
β) Πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow 16-4\cdot 2(-2\lambda+2)>0\Leftrightarrow \lambda>0$
γ) Έστω x_1 ρίζα της (1) και ρ_2 ρίζα της (2).
Προκύπτει το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=-\rho_1\\ x_1^2+\lambda x_1-5=0\\ 2\rho_1^2-4\rho_1-2\lambda+2=0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x_1=-\rho_1\\ \rho_1^2-\lambda\rho_1-5=0\\ \rho_1^2-2\rho_1-\lambda+1=0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x_1=-\rho_1\\ \rho_1^2-\lambda\rho_1-5=0\\ (\rho_1-1)^2=\lambda\end{array}\right\}$$

26. **α)** Να διερευνήσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $(3\lambda-1)x^2+(\lambda+2)x+\lambda-1=0$, ανάλογα με την τιμή του λ.
β) Να βρεθεί η τιμή του λ, ώστε το 2 να είναι ρίζα της εξίσωσης.
Λύση

α) Αν $\lambda=\frac{1}{3}$, τότε 1 ρίζα.

Αν $\lambda=\frac{20}{11}$, λ=0 , τότε 1 διπλή ρίζα.

Αν $\lambda\in\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{20}{11}\right)$, τότε 2 ρίζες.

Αν $\lambda\in(-\infty,0)\cup(\frac{20}{11},+\infty)$, καμία λύση.

β) Για x=2, $\lambda=\frac{1}{15}$.

27. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $x^2+(6-2\lambda)x+\lambda^2-1=0$ να έχει:
α) Δυο ετερόσημες ρίζες, **β)** Δυο ρίζες αρνητικές.
Λύση

α) Πρέπει $P=x_1x_2<0\Leftrightarrow\frac{\gamma}{\alpha}<0$, $\lambda\in(-1,1)$

β) Πρέπει: $S=x_1+x_2<0\ \Leftrightarrow-\frac{\beta}{\alpha}<0$, $\lambda\in(-\infty,3)$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\geq 0\\ \text{και } P>0\end{array}\right\}$$

Τελικά $\lambda\in(-\infty,-1)\cup\left(1,\frac{5}{3}\right]$

28. Να λυθούν οι ανισώσεις:
i. $|4x+2|>6$ ii. $d(x,-1)\le 2$ iii. $|x+\sqrt{5}|<-1$ iv. $|x^{21}-x-3|>2$

Λύση
i) $x>1$ ή $x<-2$ ii) $x\in[-3,1]$ iii) αδύνατη iv) $x\in\mathbb{R}$

29. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $(\lambda-1)x^2+3(\lambda-1)x+\lambda+4=0$, $\lambda\ne 1$, να έχει δυο άνισες ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Λύση
Πρέπει $\Delta<0\Leftrightarrow[3(\lambda-1)]^2-4(\lambda-1)(\lambda+4)>0\Leftrightarrow\lambda\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$.

30. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $(\lambda-1)x^2-(2\lambda+1)x+\lambda=0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες.

Λύση

Πρέπει $P=x_1x_2<0\Leftrightarrow\dfrac{\gamma}{\alpha}<0\Leftrightarrow\dfrac{\lambda}{\lambda-1}<0$, $\lambda\in(0,1)$.

Επιμέλεια: Κατέχος Γιώργος
Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο – 7ο: «ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ»

Χαρακτηρίστε τις ακόλουθες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Σωστό
4. Σωστό
5. Σωστό
6. Λάθος
7. α. Λάθος β. Σωστό
8. Σωστό
9. Σωστό
10. Σωστό
11. Σωστό
12. Λάθος
13. Σωστό

14. Λάθος
15. Λάθος
16. Σωστό
17. Λάθος
18. Λάθος
19. Σωστό
20. Λάθος

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Δίνεται το σημείο $A(-1,2)$. Να βρείτε το συμμετρικό του ως προς:
   i. τον άξονα x΄x και y΄y
   ii. την αρχή των αξόνων
   iii. την διχοτόμο του 1ου -3ου τεταρτημορίου

   Λύση

   i. x΄x: $A_1(-1,-2)$, y'y: $A_2(1,2)$
   ii. $A_3(1,-2)$
   iii. $A_4(2,-1)$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x-1$.
   Να υπολογίσετε τις τιμές f(0), $f(-\sqrt{2})$, f(a+1), f(2x), f(f(0)).

   Λύση

   f(0)=-1, $f(-\sqrt{2})$ =1-$3\sqrt{2}$,
   f(a+1) $=a^2-a-3$, f(2x) $=4x^2-6x-1$,
   f(f(0))=f(-1)=3.

3. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x^2-3x, $x\in\mathbb{R}$. Να λύσετε:
   α) Την εξίσωση f(x)=-2.
   β) Την ανίσωση f(2x)+f(x+1)<$3x^2$.

   Λύση

   α) Την x=1 , x=2.
   β) $x\in\left(\dfrac{7-\sqrt{65}}{4},\dfrac{7+\sqrt{65}}{4}\right)$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in(-\infty,1]\\3x-1, x\in(1,+\infty)\end{cases}$
   α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **β)** Να υπολογίσετε τις τιμές f(0), f(1), f(π), $f(\sqrt{2})$

   Λύση

   α) $x\in\mathbb{R}$
   β) f(0)=0, f(1)=1, f(π)=3π-1, $f(\sqrt{2})$ =3$\sqrt{2}$ -1.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-1, & -2<x<0\\ \alpha x^3+\beta, & 0\le x\le 1\end{cases}$.

α) Να βρείτε το πεδίου ορισμού της f. **β)** Να βρείτε τα α, β ώστε f(-1)=2 & f(1)=3

Λύση

α) $x\in(-2,1]$

β) α = 3, β=0.

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.

α) $f(x)=\frac{3x+1}{x^2-1}$ **β)** $f(x)=\frac{2}{5x^2-x-4}$ **γ)** $f(x)=\frac{x-1}{x^2-x+1}$

δ) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ **ε)** $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$ **στ)** $f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x-2}$

ζ) $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ **η)** $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x-1}}+\frac{5}{x-2}$ **θ)** $f(x)=\frac{x+3}{|x-1|-2}$

Λύση

α) $A_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ **β)** $A_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{4}{5},1\right\}$ **γ)** $A_f=\Re$

δ) $A_f=\Re-\{2,3\}$ **ε)** $A_f=[1,+\infty)$ **στ)** $A_f=[1,2)\cup(2,+\infty)$

ζ) $A_f=\Re$ **η)** $A_f=(1,2)\cup(2,+\infty)$ **θ)** $A_f=\Re-\{-1,3\}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-2x$. Να λύσετε:

α) Την εξίσωση f(x)=0.

β) Την εξίσωση f(x-1)-f(x)=1.

γ) Την ανίσωση $f(2x)-8f(x)<x^2$.

Λύση

α) Την x=0 , x=$\pm\sqrt{2}$.

β) Την x=0 , x=1

γ) Την $x\in(-\infty,0)\cup(12,+\infty)$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\frac{3}{x-2}+4$, $g(x)=\frac{x^2+x}{x^2-1}$, $h(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

α) f(x)=5 **β)** $g(x)=\frac{1}{2}$ **γ)** h(x)=1

Λύση

α) x=5 **β)** x=-1 (απορρίπτεται) **γ)** x=1

9. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{42}{x^2-6x}$ και $g(x)=\dfrac{7}{x-6}+2$.

   α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των f και g.

   β) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=g(x).

Λύση

α) $A_f=\mathbb{R}-\{0,6\}$, $A_g=\mathbb{R}-\{6\}$

β) x= $-\dfrac{7}{2}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda\sqrt{x+1}$.

    α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

    β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η C_f διέρχεται από το σημείο A(3,4).

Λύση

α) $A_f=[-1,+\infty)$

β) $\lambda=2$.

11. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A}(-1,-3), \mathrm{B}(1,-1)$ και $\Gamma(-1,-1)$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Λύση

$(\mathrm{AB})=\sqrt{(1+1)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{8}$ και όμοια είναι $(\mathrm{B}\Gamma)=\sqrt{4}, (\mathrm{A}\Gamma)=\sqrt{4}$

Αφού $(\mathrm{B}\Gamma)=(\mathrm{A}\Gamma)$ και $(\mathrm{AB})^2=(\mathrm{A}\Gamma)^2+(\mathrm{B}\Gamma)^2$ το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

12. Στο διπλανό σχήμα βλέπετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

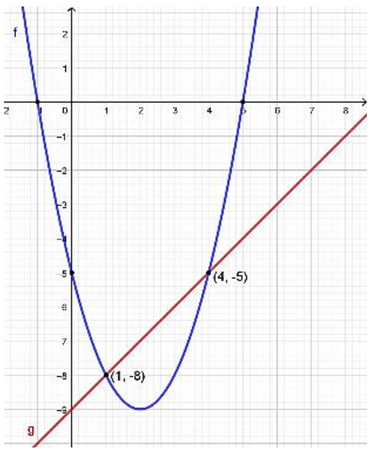
    α. να βρείτε το $\mathrm{f}(0), \mathrm{f}(1)$ και το $\mathrm{f}(4)$.

    β. να λυθεί η εξίσωση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$.

    γ. να λυθεί η ανίσωση $\mathrm{f}(\mathrm{x})<0$.

    δ. να βρείτε τα κοινά σημεία των $\mathrm{C_f}$ και $\mathrm{C_g}$.

    ε. να λύσετε την ανισότητα $\mathrm{f}(\mathrm{x})<\mathrm{g}(\mathrm{x})$.



Λύση

α. $f(0)=-5, f(1)=-8, f(4)=-5$

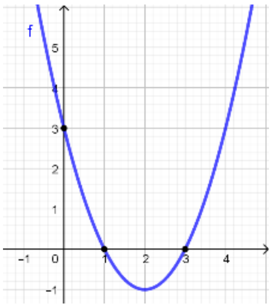
β. $x=-1$ ή $x=5$

γ. $x\in(-1,5)$

δ. $A(1,-8), B(4,-5)$

ε. $x\in(1,4)$

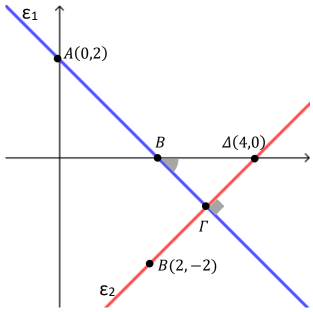
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.



Λύση

$f(0) = 3$ και $f(1) = f(3) = 0$ και προκύπτει η $f(x) = x^2 - 4x + 3$

14. Στο διπλανό σχήμα, να βρείτε:



α. τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2.
β. το σημείο Γ .
γ. την γωνία $\Delta\widehat{B}\Gamma$.
δ. το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ.

Λύση

α. $\varepsilon_1: y = -x + 2, \ \varepsilon_2: y = x - 4$
β. $\Gamma(3, -1)$
γ. 45^o
δ. 1

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Να γράψετε το πεδίο ορισμού της και στη συνέχεια να βρείτε:
α) Τα σημεία της τομής C_f με τους άξονες.
β) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x.

Λύση

$A_f = \mathbb{R} - \{1\}$

α) Τα Α(0,-1) και Β(1,0).

β) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ και g(x)=x-1.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων και να βρείτε:
α) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g.
β) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την C_g.

Λύση

$A_f = \Re^*$ και $A_g = \Re$.

α) Πρέπει : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

β) Πρέπει : $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<2\\ x^2+2x, & x\geq 2\end{cases}$. Να βρείτε:

α) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
β) Να εξετάσετε αν το σημείο Α(-1,1) ανήκει στην C_f. **γ)** Να βρείτε το f(f(1)).

Λύση

α) Τέμνει x΄x για x<2 : $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ $A(-\frac{1}{2},0)$

Τέμνει x΄x για x≥2 : $f(x)=0 \Leftrightarrow$ αδύνατη

Τέμνει y΄y για x<2 : $f(0)=1$ $\Delta(0,1)$

β) $f(-1)=-1\neq 1$, άρα το σημείο Α(-1,1) δεν ανήκει στην C_f.

γ) f(f(1))=15.

18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-x+1$ και $g(x)=x^2+x-2$. Να βρείτε:
α) Τα σημεία τομής των C_f και C_g.
β) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

Λύση

α) Πρέπει : $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}, y=\frac{7}{4}$

Άρα $A(\frac{3}{2},\frac{7}{4})$.

β) Πρέπει: $f(x)<g(x) \Leftrightarrow x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+2$. Να βρείτε:
α) Το πεδίο ορισμού της f.
β) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
γ) Τα διαστήματα x που η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

Λύση

α) $A_f=\Re$.

β) Τέμνει x΄x : $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1, x=2$ $\qquad$ $A(1,0)$, $B(2,0)$.

Τέμνει y΄y : $f(0)=2$ $\qquad$ $\Gamma(0,2)$.

γ) $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

20. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=x^2-3 και g(x)=5x-9. Να βρείτε:

α) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

β) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την C_g.

Λύση

α) Πρέπει : $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=2, x=3, y=1, y=6$

Άρα Α(2,1), Β(3,6)

β) Πρέπει : $f(x)>g(x) \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

21. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ και $g(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Να βρείτε:

α) Τα πεδία ορισμού τους.

β) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

γ) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την C_g.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της C_f με τετμημένη 4.

Λύση

α) $A_f=[-1,1)$ και $A_g=(-1,1]$.

β) Πρέπει: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=0, y=1$.

Άρα Α(0,1)

γ) Πρέπει: $f(x)>g(x) \Leftrightarrow x\in(0,1)$.

δ) Πρέπει $4\in A_f$ Αδύνατο.

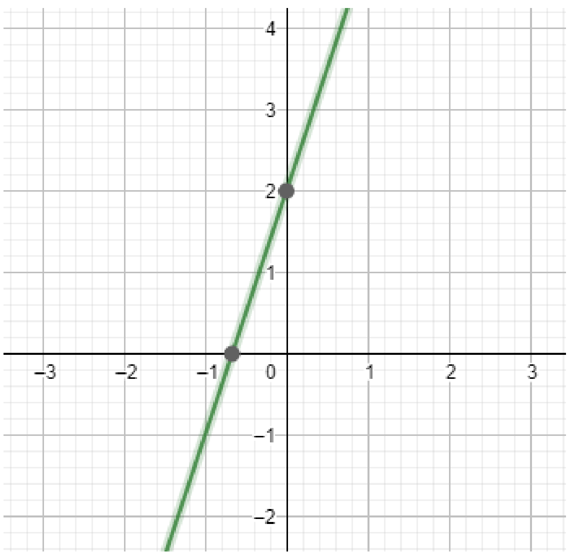
22. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) f(x)=3x+2, $x\in R$ **β)** f(x)=3x+2, x>1 **γ)** f(x)=3x+2, $-1\le x<1$

Λύση

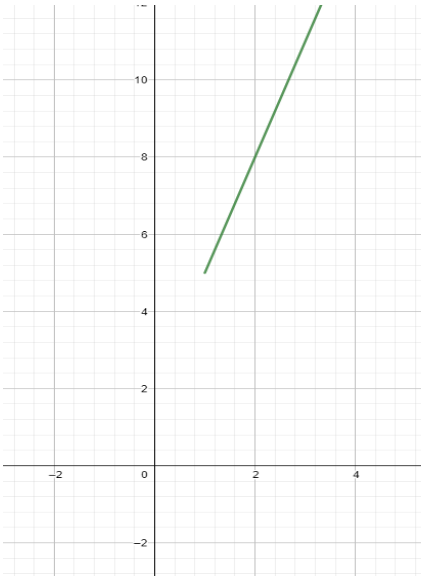
α)

x	0	-2/3
y	2	0



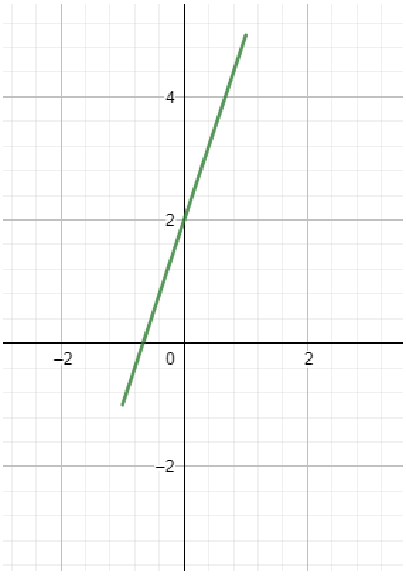
β)

x	1	2
y	5	8



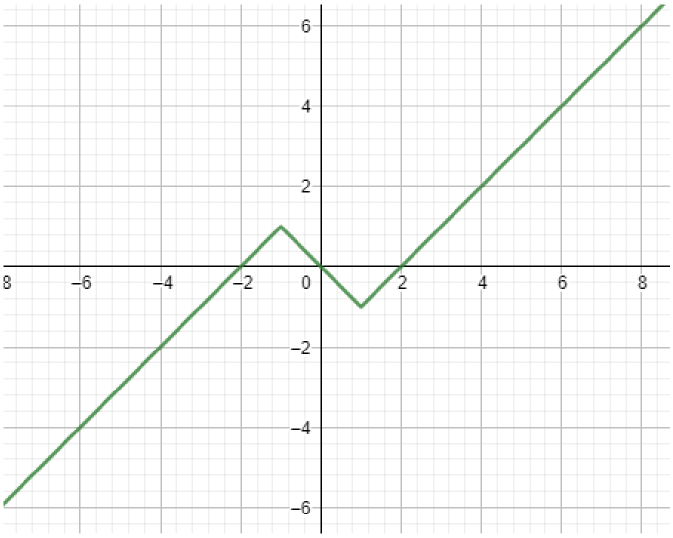
γ)

x	-1	1
y	-1	5



23. Να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1 \\ -x, & -1<x<1 \\ x-2, & x\ge 1 \end{cases}$.

Λύση



24. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

α) Έχει συντελεστή διεύθυνσης 2 και διέρχεται από το σημείο Α(2,3).

β) Σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω=135^o και διέρχεται από το σημείο Β(2,1).

γ) Είναι παράλληλη με την ευθεία y=-2x+4 και διέρχεται από το σημείο Γ(-1,5).

Λύση

α) y = 2x – 1,

β) y = -x + 3 ,

γ) y= - 2x + 3.

Επιμέλεια: Κατέχος Γιώργος
Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος