ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο / σελίδα 99.

Α2. Σχολικό βιβλίο / σελίδα 162.

Α3. Σχολικό βιβλίο / σελίδα 129.

Α4. α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. η f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		+		-		+	
		↗	τ. μ.	↘	τ. ε.	↗	

η f ↗ στα $(-\infty$,-1], [1, $+\infty)$ και η f ↘ στο [-1,1]

η f παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο $x_0=-1$ το $f(-1)=3$

η f παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=-1$

Β2. $\psi - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = -3(x-0) \Leftrightarrow \psi = 3x+1$

Β3 $I = \int_1^2 \frac{x^3-3x+1}{x}dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^2 (x^2 - 3 + \frac{1}{x})dx =$

$\left[\frac{x^3}{3} - 3x + \ln x\right]_1^2 =$

$(\frac{8}{3} - 6 + \ln 2) - (\frac{1}{3} - 3 + \ln 1) = \frac{8}{3} - 6 + \ln 2 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{7}{3} - 3 + \ln 2 = \frac{-2}{3} + \ln 2$

Β4 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x+1}{x^3} = \lim_{x++\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1 $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(x \cdot \frac{1}{x-1}\right) = +\infty$

διότι $\lim_{x\to1^+} x = 1$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to1^+}(x-1)=0 \\ x-1>0\end{array}\right\} \quad \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$

οπότε αν $x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της c_f. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1} = \lim_{x++\infty}\frac{x}{x} = 1$

οπότε η ψ=1 οριζόντια ασύμπτωτη της c_f στο $+\infty$

Γ2 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \ln x = 0$

έστω $k(x) = \frac{x}{x-1} - \ln x \,|\, [e, e^2]$

i) η κ συνεχής στο $\left[e, e^2\right]$ ως η διαφορά συνεχών

ii) $k(e)k(e^2) = \left(\frac{e}{e-1} - \ln e\right)\left(\frac{e^2}{e^2-1} - \ln e^2\right) =$

$\left(\frac{e}{e-1} - 1\right)\cdot\left(\frac{e^2}{e^2-1} - 2\right) = \frac{1}{e-1}\cdot\frac{2-e^2}{e^2-1} = \frac{2-e^2}{(e-1)^2(e+1)} < 0$

ισχύει Θ. Bolzano οπότε η κ έχει μια τουλ. ρίζα στο (e,e^2)

Γ3 $Agof = \{x \in (1,+\infty\}$ και $\left.\dfrac{x}{x-1} \in (0,+\infty)\right\} = \{x \in (1,+\infty)$ και

$x(x-1) > 0\} \Leftrightarrow \{x \in (1+\infty)$ και $x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)\} = (1,+\infty) \neq \emptyset$ οπότε ορίζεται η gof

$\varphi(x) = (gof)(x) = g(f(x)) = \ln\dfrac{x}{x-1} = \ln x - \ln(x-1)$ για $x \in (1+\infty)$

Γ4. Για να οριστεί η h πρέπει $\dfrac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup (1+\infty)$

οπότε $A_h = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ $A_\varphi \neq A_h$ επομένως δεν είναι ίσες.

<u>**ΘΕΜΑ Δ**</u>

Δ1. Έστω $g(x) = \dfrac{f(x) - \eta\mu x}{x} \Leftrightarrow xg(x) = f(x) - \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) = x \cdot g(x) + \eta\mu x$

η f συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(xg(x) + \eta\mu x) = 0 + \eta\mu 0 = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{xg(x)+\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{xg(x)}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left[g(x) + \frac{\eta\mu x}{x}\right] = 0+1=1$$

Οπότε $f'(0) = 1$

Δ2. $f'(x)f''(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) = 2x \Leftrightarrow \left[f'^2(x)\right]' = \left(x^2\right)'$

οι συναρτήσεις $f'(x), x^2$ συνεχείς στο $\mathbb{R}$ οπότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\left[f'(x)\right]^2 = x^2 + c$

για $x = 0$ $f'(0)^2 = 0 + c \Leftrightarrow 1 = c$ $\left[f'(x)\right]^2 = x^2 + 1 \neq 0$ και εφόσον η f' είναι συνεχείς διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ $f'(x) = \sqrt{x^2+1}$ ή $f'(x) = -\sqrt{x^2+1}$ απόρ. διότι $f'(0) = 1$

Δ3 $f''(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	+	
		σ.κ	

στο $(-\infty,0]$ η f είναι κήλη

στο $[0,+\infty)$ η f είναι κυρτή

το σημείο (0.0) σημείο καμπής

Δ4 $f'(x)>0$ οπότε η f↑στο R άρα 1-1

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

η εξίσωση εφαπτόμενης της c_f στο $x_0=0$ είναι $\psi-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow\psi=x$

η f κοίλη στο $(-\infty,0]$ οπότε $f(x)\le x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

η f κυρτή στο $[0,+\infty)$ οπότε $f(x)\ge x$ για $[0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f(A)=(-\infty,+\infty)=$ R άρα $A_{f^{-1}}=$ R

Επιμέλεια: Ρούτης Κωνσταντίνος
Οικονομόπουλος Αναστάσιος