ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 04 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 155

Α3. Θεωρία- Βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α4.

α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A = A_g \cap A_f = [1,+\infty) \neq \varnothing$

Επιπλέον, $h(x) \neq 0$ οπότε

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Οπότε $A_f = (1,+\infty)$ και $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1}{\cancel{\sqrt{x}}}}{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1}{\cancel{\sqrt{x}}}} = \dfrac{x+1}{x-1}$

Για $x \in [1,+\infty)$ $r(x) = g(x)\cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \dfrac{1}{x}$

Β2.

Για $x \in (1,+\infty)$, $f'(x) = \dfrac{(x+1)'(x-1) = (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = -\dfrac{2}{(x-1)^2} < 0$

Οπότε η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα ↘ στο $(1,+\infty)$ άρα 1-1

$f(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right) = (1,+\infty)$ διότι

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\left[(x+1)\cdot\dfrac{1}{x-1}\right] = +\infty$

Εφόσον $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to1^+}(x+1) = 2, \ \lim\limits_{x\to1^+}(x-1) = 0 \\ x-1>0 \end{matrix}\right\} \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$

Επομένως $A_{f^{-1}} = (1,+\infty)$. Για $\psi \in (1,+\infty)$ με

$$\psi = f(x) \Leftrightarrow \psi = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \psi x - \psi = x+1 \Leftrightarrow \psi x - x = \psi + 1 \Leftrightarrow (\psi-1)x = \psi+1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\psi+1}{\psi-1}$$

Οπότε $f^{-1} : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Τέλος, έχουμε ότι $\begin{cases} A_f = A_{f^{-1}} = (1,+\infty) \\ f(x) = f^{-1}(x) \ \ \forall x \in (1,+\infty) \end{cases}$ άρα $f = f^{-1}$.

Β3.

$r(x) = x - \dfrac{1}{x}$ $[1,+\infty)$

$r(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

Δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες, διότι r συνεχής στο $[1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{r(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$

$$\lim_{x\to+\infty}(r(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

Οπότε $\psi = x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Β4.

Η εξίσωση ορίζεται για x>1,

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1+4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$x^2 = 1+4\frac{x^2-1}{x} \Leftrightarrow x^3 = x+4x^2-4$$

$$x^3-4x^2-x+4=0 \Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0$$

$$(x-4)\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=1 \text{ απορ} \\ x=-1 \text{ απορ.} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

f συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα f συνεχής στο $x_0 = 2$. Άρα

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to2^-}\left(-2x+4+e^\lambda\right) = \lim_{x\to2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right)$$

$$\Leftrightarrow -4+4+e^\lambda = -4+8-3+\lambda \Leftrightarrow e^\lambda = 1+\lambda \Leftrightarrow$$

$$e^\lambda - \lambda - 1 = 0$$

Έστω $g(\lambda) = e^\lambda - \lambda - 1$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε g συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(\lambda) = e^\lambda - 1$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^\lambda - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^\lambda \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$$

λ	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(\lambda)$		$-$	0	$+$	
$g(\lambda)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Στο $\lambda_0 = 0$ η g παρουσιάζει ελάχιστο το $g(0) = 0$.

Στο $(-\infty, 0]$ η g είναι ↘ άρα

Για $\lambda < 0 \Leftrightarrow g(\lambda) > g(0) \Leftrightarrow g(\lambda) > 0$

Στο $[0, +\infty)$ η g είναι ↗ άρα

Για $\lambda > 0 \Leftrightarrow g(\lambda) > g(0) \Leftrightarrow g(\lambda) > 0$

Οπότε λ=0 μοναδική ρίζα της g.

Γ2.

Έχουμε $f(x) = \begin{cases} -2x+5, & 0 \le x < 2 \\ -x^2+4x-3, & x \ge 2 \end{cases}$

- Για $0 \le x < 2$, $f(x) = -2x+5$ άρα $f'(x) = -2 < 0$

  Άρα η f είναι ↘ στο $[0,2]$

- Για x>2, $f(x) = -x^2+4x-3$ άρα $f'(x) = -2x+4 < 0$

  Άρα η f είναι ↘ στο $[2, +\infty)$

Επειδή f συνεχής στο 2 η f είναι ↘ στο $[0, +\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 5$

Επιπλέον, η f δεν παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο, διότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}(-x^2) = -\infty$

Γ3.

i. Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ από υπόθεση.

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-2x+5-1}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-2x+4}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} [-(x-2)] = 0$$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ άρα η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο $[0,3]$

ii. Έχουμε $\lambda_{ΔΕ} = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{0-5}{3-0} = -\dfrac{5}{3}$

Για $x<2$, $f'(x) = -2 \neq -\dfrac{5}{3}$

Για $2<x<3$, $f'(x) = -2x+4$ και εξετάζουμε αν

$f'(x) = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow -2x+4 = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow -6x+12 = -5 \Leftrightarrow$

$-6x = -17 \Leftrightarrow x = \dfrac{17}{6} \in (2,3)$ δεκτή

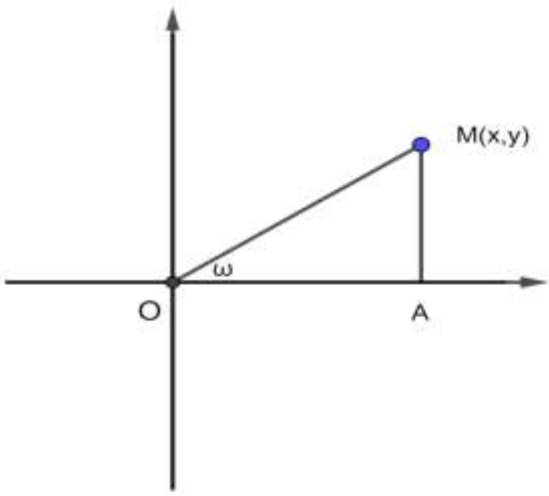
Άρα $\xi = \dfrac{17}{6}$

Γ4.

$y'(t) = 0,5$ μον / sec

Το $f(2)=1$ άρα την χρονική στιγμή t_0 έχουμε

$x(t_0)=2$ και $y(t_0)=1$. Τότε



$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{AM}{OA} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \dfrac{y}{2}$

Άρα $\varepsilon\varphi\omega(t) = \dfrac{y(t)}{2}$. Άρα $\dfrac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} = \dfrac{y'(t)}{2}$ Για $t=t_0$ έχουμε $\dfrac{\omega'(t_0)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)} = \dfrac{y'(t_0)}{2} = \dfrac{1}{4}$ (1)

Ισχύει $\varepsilon\varphi\omega(t_0) = \dfrac{y(t_0)}{x(t_0)} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega(t_0) = \dfrac{1}{4}$. Τότε, επειδή $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)} = \varepsilon\varphi^2\omega(t_0)+1$

$$(1) \Rightarrow \omega'(t_0)\left(\varepsilon\varphi^2\omega(t_0)+1\right)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\omega'(t_0)\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_0)\frac{5}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_0)=\frac{1}{5}\text{rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων για $x>0$ με $f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)x-(lnx+ax)}{x^2}=\frac{1+ax-lnx-ax}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-lnx=0 \Leftrightarrow lnx=1 \Leftrightarrow x=e$.

Επίσης, $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-lnx}{x^2}>0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} lnx<1 \Leftrightarrow 0<x<e$ και

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x>e$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0		e		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	
$f(x)$			$\nearrow$	$\frac{1}{e}+a$ OM	$\searrow$	

Αφού $f'(x)>0$ για $0<x<e$, $f'(x)>0$ για $x>e$, $f'(e)=0$ και η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$. Παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο για $x=e$ το $f(e)=\frac{lne+ae}{e}=\frac{1}{e}+a$. Από το σύνολο τιμών της f προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της είναι ίση με $\frac{1}{e}+1$, άρα $\frac{1}{e}+\alpha=\frac{1}{e}+1 \Leftrightarrow \alpha=1$.

Δ2.

Για $\alpha=1$ είναι $f(x)=\frac{lnx+x}{x}=\frac{lnx}{x}+1$ με $x>0$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\frac{1}{2},1]$ ως πράξεις συνεχών.

Είναι $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 = 2ln\frac{1}{2} + 1 = 1 - ln4 < 0$ και $f(1) = 1 > 0$,

άρα $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$, οπότε, σύμφωνα με θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, δηλαδή $f(x_0) = 0$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και $[\frac{1}{2}, 1] \subseteq (0, e]$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2}, 1]$, άρα και 1-1, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Δ3.

i. $f(x) = f(4) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln 4 + 4}{4} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 = \frac{\ln 4}{4} + 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$

Έστω $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Τότε

$\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$, $x > 0$. Άρα $\varphi'(x) \geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln x \Leftrightarrow e \geq x > 0$

x	$-\infty$ $\quad$ 0	e $\quad$ $+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$\varphi(x)$		$\nearrow$ $\quad$ $\frac{1}{e}$ ΟΜ $\quad$ $\searrow$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to 0^+}\left(\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\varphi(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Στο $A_1 = (0, e]$ η φ συνεχής και $\nearrow$ άρα

$$\varphi(A_1) = \left(\lim_{x \to 0^+} \varphi(x), \varphi(e)\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$$

$$2 < e \overset{\varphi \nearrow}{\Leftrightarrow} \varphi(2) < \varphi(e) \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{e}$$

Άρα 2 μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x)=\frac{\ln 2}{2}$ στο (0, e)

Στο $A_2=[e,+\infty)$, η φ συνεχής και ↘ άρα

$\varphi(A_2)=\left[\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),\varphi(e)\right)=\left[0,\frac{1}{e}\right)$

$4>e\overset{\varphi\searrow}{\Leftrightarrow}\varphi(4)<\varphi(e)\Leftrightarrow\varphi(4)<\frac{1}{e}$

Άρα 4 μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x)=\frac{\ln 2}{2}$ στο $[e,+\infty)$

ii. $2^x\le x^2\Leftrightarrow \ln 2^x\le \ln x^2\Leftrightarrow x\ln 2\le 2\ln x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{\ln 2}{2}\le\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow\varphi(x)\ge\frac{\ln 2}{2}(1)$

Η εξίσωση $\varphi(x)=\frac{\ln 2}{2}$ έχει ακριβώς 2 ρίζες τις

$x_1=2$ και $x_2=4$

Η συνάρτηση $h(x)=\varphi(x)-\frac{\ln 2}{2}$ είναι συνεχής στο (2, 4) και 2, 4 διαδοχικές ρίζες της h.

Άρα από συνέπεια του Θ. Bolzano η h διατηρεί πρόσημο στο (2, 4)

Επειδή $h(e)=\frac{1}{e}-\frac{\ln 2}{2}>0\ \forall x\in(2,4)$

Ισχύει $h(x)\ge 0\Leftrightarrow\varphi(x)\ge\frac{\ln 2}{x}\ \forall\in[2,4]$ για κάθε $x\in[2,4]$

Δ4.

$g(x)=f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}$

$E=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\right|\cdot\frac{1-x}{e^x}dx$, διότι $\frac{1-x}{e^x}>0$ για κάθε εξίσωσης $x\in(-\ln 2,0)$

Θέτουμε $e^x=u$ **τότε** $e^x dx=du\Leftrightarrow dx=\frac{du}{u}$

x	-ln2	0
u	$\frac{1}{2}$	1

$E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\right|\cdot\frac{1-\ln u}{u^2}du=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}\left|f(u)\right|\cdot\frac{1-\ln u}{u^2}du+\int_{x_0}^{1}\left|f(u)\right|\cdot\frac{1-\ln u}{u^2}du\ (1)$

Στο $\left[\frac{1}{2}, x_0\right]$ **η f γν. αύξουσα, άρα για** $\frac{1}{2} < x < x_0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < f(x) < f(x_0) = 0$

Στο $[x_0, 1]$ **η f γν. αύξουσα, άρα για**

$x_0 < x < 1 \Rightarrow f(x_0) < f(x) < f(1) \Rightarrow 0 < f(x) < f(1)$

Τότε,

$$(1) \Rightarrow E = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u) \cdot f'(u) du + \int_{x_0}^{1} f(u) \cdot f'(u) du = -\frac{1}{2}\left[f^2(u)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \frac{1}{2}\left[f^2(u)\right]_{x_0}^{1} =$$

$$(1) \Rightarrow -\frac{1}{2}f^2(x_0) + \frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f^2(1) - \frac{1}{2}f^2(x_0) = \frac{1}{2}\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right) + f^2(1)\right) = \frac{1}{2}\left((1-2\ln 2)^2 + 1\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(4\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2\right) = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1 = \ln^2 2 + (\ln 2 - 1)^2 \text{ τ.μ}$$

Επιμέλεια: Κατέχος Γιώργος
Καραγιάννης Κωνσταντίνος
Κουβούσης Παναγιώτης
Μακρίδης Κωνσταντίνος
Μπαμπέ Αφροδίτη
Οικονομόπουλος Αναστάσιος
Ρούτης Κωνσταντίνος
Σάββας Νίκος